5分钟学不会斐波那契数列

title: 5分钟学不会斐波那契数列 date: 2020-09-23 23:43:30 tags: [算法, 斐波那契] categories: [技术] description: 这篇文章5分钟读不完 mathjax: true

本文的写作灵感来自与凤凰木的面试题 《我们为什么要考斐波那契数列——一道上机笔试题的解析，兼谈技术面试与编程基本功》,先行致谢。

前置知识

- 了解基本的大学数学知识(数列，等比公式，待定系数法，矩阵...)
- 基本的编程知识
- 了解简单的Scala语法(非必须)

问题的引出

斐波那契数列（The Fibonacci sequence， OEIS A000045 ）的定义如下：

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1$$
$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \ for\ n \geq 2$$

很多问题都和Fibonacci数列有关

- 奥数题：爬楼梯，铺砖块
- 欧几里得算法求最大公约数时，最坏情况为两个连续的 Fibonacci 数列
- 斐波那契回调线，在金融交易市场中被用做确认支撑位和阻力位的一种工具

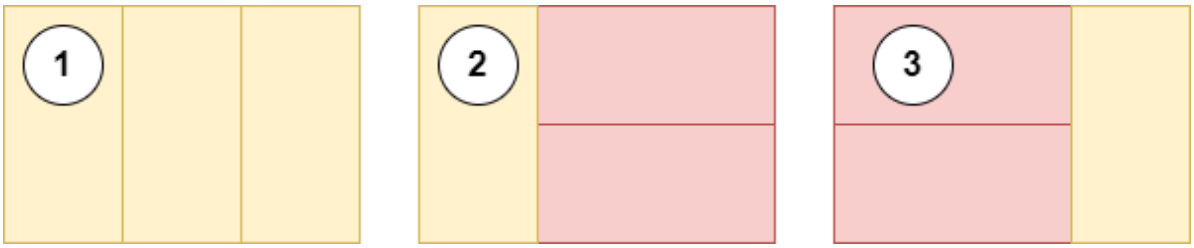
一道简单的小学数学题

现在有长度为10， 宽度为2的长方形地板需要铺设地砖，地砖有两种

- 一种是长度为1，宽度为2的
- 一种是长度为2，宽度为1的

试问不同的铺设方案有多少种?

比如长度为3，宽度为2的地板铺设方案，有3种可选的铺设方案



这就是一个典型的求斐波那契数列的问题，和爬楼梯类似。

设f(n)为长度为n，宽度为2的长方形地盘的铺设方案数，对于较小规模的情况，穷举可得方案数

f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 3

对于长度为n的地板，需要求f(n)，分类考虑下面两种情况

- 最右边的地砖是竖着放的，剩下需要摆放的长度减少至n-1，那么这个问题可以被化归成f(n-1)
- 最右边的地砖是横着放的，那么这个地砖下面的一个位置必然也是横着放的，这两个地砖一共占用了2的长度，剩下需要拜访的长度减少至n-2, 那么这个问题可以被化归成f(n-2)

综合考虑以上两种情况(已经列举完了)，长度为n的方案数=长度为n-1的方案数+长度为n-2的方案数

所以有状态转移方程 f(n) = f(n-1) + f(n-2)

如果你耐着性子手算，结果应该是这样的

```
f(1)=1
f(2)=2
f(3)=3
f(4)=5
f(5)=8
f(6)=13
f(7)=21
f(8)=34
f(9)=55
f(10)=89
```

据此可以写出代码如下

```
def fib(n: Int): Int = {
  var (a, b) = (0, 1)
  for (i <- 1 to n) {
    val temp = b
    b = a + b
    a = temp
  }
  b
}
```

一点简单的扩展

上面的代码，能不能一行搞定?

```
def fib (n: Int): Int = if (n <= 1) n else fib(n-1) + fib(n-2)
```

乍一看很优美，但仔细考虑下，好像有点不对劲

如果在2020年的低配笔记本上运行的话，到40左右就会感觉明显的卡顿

这个问题在大学C语言教材里`4.3.2 斐波那契序列（计算与时间）`也有提到，下面是书中的图

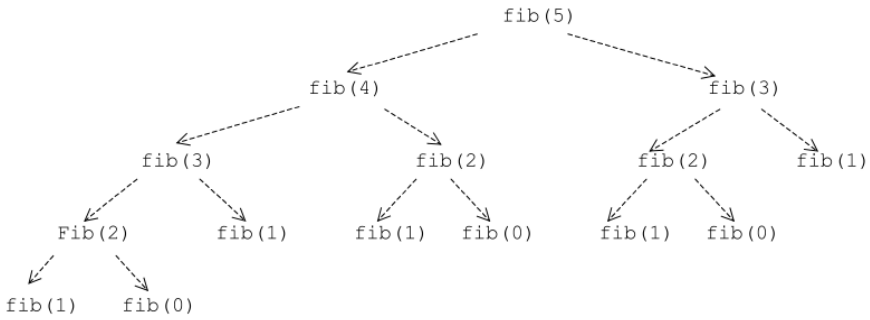


图 4.2　fib(5)计算中的函数调用情况

我们可以看到，很多步骤被多次重复计算，比如`fib(2)`就被计算了3次

> 更严重的问题是，参数值增加 1，函数 fib 的计算时间将为原来的 1.6 倍左右（这是理 论估计，实际时间可能更多）。

我们来对比一下这两段代码，第一段代码确实比第二段代码好吗?

不知道你知不知道大O表示法，这是由某不知名高老头提出的记法，用来估算算法的时间复杂度的一种符号。

当问题规模为n时，用这种表示方法，前者的时间复杂度为O(n)，后者的时间复杂度近似为O(2^n)

之所以说是近似，后者的时间复杂度其实和fib(n)相关，感兴趣的话可以查阅这篇论文和讨论以及这篇知乎文章

这样看来，从时间上来看，第一种方案显然更好，但是从代码的美感上来说，前者需要维护的状态过多，不如递归解法直观

什么是**代码的美**呢?

这其实是一个很主观的感受，以树的后序遍历为例，下面是递归和非递归的写法

```
class TreeNode(var _value: Int = 0) {
  var value: Int = _value
  var left: TreeNode = _
  var right: TreeNode = _
}

def postorderTraversal(root: TreeNode): List[Int] = {
  if (root == null) Nil
  else postorderTraversal(root.left) ++ postorderTraversal(root.right) :+
root.value
}

def postorderTraversal2(root: TreeNode): List[Int] = {
  import scala.collection.mutable
  val s = mutable.Stack[TreeNode]()
  val res = mutable.ListBuffer[Int]()
  if (root == null) return res.toList
  s.push(root, root)
  while (s.nonEmpty) {
    val node = s.pop()
    if (s.nonEmpty && node == s.top) {
      if (node.right != null)
        s.push(node.right, node.right)
      if (node.left != null)
          s.push(node.left, node.left)
    } else {
      res += node.value
    }
  }
  res.toList
}
```

我个人觉得前者可读性更强。

优美和性能，我全都要

有没有办法可以兼顾递归的简洁和循环迭代的效率呢?

其实用尾递归可以让编译器帮我们自动把它转换成循环的形式，同时还不影响性能(附带地还避免了栈溢出的错误)

~~scala编译这么慢怎么想都是你们的错，自己偷懒让编译器干活~~

只要简单的做个『包装』就行了

```
def fib(n: Int): Int = {
  @scala.annotation.tailrec
  def f(n: Int, a: Int = 0, b: Int = 1): Int = {
    if (n == 0) a
    else f(n-1, b, a+b)
  }
  f(n)
}
```

关于尾递归的的实现，很难找到相关资料，下面是我用Intellij IDEA 2020.1.4 的反编译上面的代码到Java，只摘取关键部分

```
public int fib(final int n) {
    return this.f$1(n, f$default$2$1(), f$default$3$1());
}

private final int f$1(final int n, final int a, final int b) {
    while(n != 0) {
       int var10000 = n - 1;
       int var10001 = b;
       b += a;
       a = var10001;
       n = var10000;
    }

    return a;
}

private static final int f$default$2$1() {
    return 0;
}

private static final int f$default$3$1() {
    return 1;
}
```

通过阅读反编译后的代码，我们发现，编译器帮我们把递归形式的代码，等价展开成迭代形式的代码

所谓外递归内迭代，这样就两全其美了

什么是奇技淫巧啊

```
def fib(n: Int): Int = {
  case class Memo[A, B](f: A => B) extends (A => B) {
    import scala.collection.mutable
    private val cache = mutable.Map[A, B]()
    def apply(a: A): B = cache.getOrElseUpdate(a, f(a))
  }

  lazy val f: Memo[Int, Int] = Memo {
```

```
    case n: Int if n < 2 => n
    case n: Int => f(n-1) + f(n-2)
  }

  f(n)
}
```

这段代码实现了不使用尾递归的方式，也能把递归的代码优化到O(n)时间复杂度

思路是计算过程中，额外开辟一个空间存放中间结果

后续计算时，如果需要的结果已经计算完成，就能直接取来用

一点范围的扩展

目前位置，我们的代码对于较小的测试样例表现良好，但是对于更大的输入呢?

fib(100)的准确值是多少?

如果你把上面的代码照搬，直接输入的话

```
scala> fib(100)
val res4: Int = -980107325
```

~~显然，计算的结果溢出了 `Int` 能表示的范围~~

这里还是稍微花点时间，讲解下显然背后的原理

所谓补码

计算机的底层存储，是按位(bit)来存的，每一个位有两个状态，0和1，在电路上分别对应低电平和高电平

假如我们用2bit来表示一个整数

首位	末位	代表的数
0	0	0
0	1	1
1	0	2
1	1	3

这就是无符号整数，只能表示非负数

如果想要表示复数，我们可以简单的偏移一个量(-2)，这样可以让正负数的量尽可能均匀

首位	末位	代表的数
0	0	-2
0	1	-1
1	0	0
1	1	1

这样表示上是没有问题了，但是计算上不方便

举个例子，这套系统应该能表示-2 ~ 1范围内的运算，那么

`-1(01) + -1(01) = -2(00)`

括号内为我们使用的编码，括号外为需要计算的数字

`01 + 01 = 10` 才对，编码对不上

不过，这难不倒聪明的前人，只要稍加修改下编码方案，就能让符号位也能正常参与运算

首位	末位	代表的数
0	0	0
0	1	1
1	0	-2
1	1	-1

`-1(11) + -1(11) = -2(10)`

这就是所谓的补码

我们使用的`Int`数据类型，也是用补码来实现的，使用了32bit来存储，所以能表示的范围是 -2^31 ~ 2^31 -1

所谓溢出，就是指运算超过能表示的范围，观察下下面的例子你就明白了

```
scala> val a = 1<<16
val a: Int = 65536

scala> a * a
val res70: Int = 0

scala> val b = 1<<31
val b: Int = -2147483648

scala> b - 1
val res71: Int = 2147483647
```

~~好了，显然内的内容讲完了~~

事实上，`fib(47)`就溢出了

```
scala> fib(46)
val res9: Int = 1836311903

scala> fib(47)
val res10: Int = -1323752223
```

知道问题就好办了，我们只需要增加数据能表示的范围就行了

Scala 内置的`BigInt`很方便就能做到这一点

```
def fib(n: Int): BigInt = {
  var (a, b) = (BigInt(0), BigInt(1))
  for (i <- 1 to n) {
    val temp = b
    b = a + b
    a = temp
  }
  b
}

//scala> fib(100)
//val res11: BigInt = 573147844013817084101
```

一个思考题：Long能存下fib(100)的结果而不溢出吗?

花枪其二

或者我们可以稍微耍个花枪，用`LazyList`来构造一个生成器

```
val fibs: LazyList[BigInt] =
  BigInt(0) #:: BigInt(1) #:: (fibs zip fibs.tail).map{ t => t._1 + t._2 }

scala> fibs
val res0: LazyList[BigInt] = LazyList(<not computed>)

scala> fibs(4)
val res1: BigInt = 3

scala> fibs
val res2: LazyList[BigInt] = LazyList(0, 1, 1, 2, 3, <not computed>)
```

这样定义的`fibs`有个好处，就是懒，不问不算，但是一旦算好，结果就保存起来了

寻找失去的精度

为什么不用`Double`呢？根据IEEE754,双精度浮点数的精度有限

在IEEE 754标准中，用64位来存储双精度浮点数

其中分配了52位来存储浮点数的有效数字，11位存储指数，1位存储正负号

一旦需要确保精度，就会出现问题

```
scala> val a = 1.9999999999999999999999
val a: Double = 2.0
```

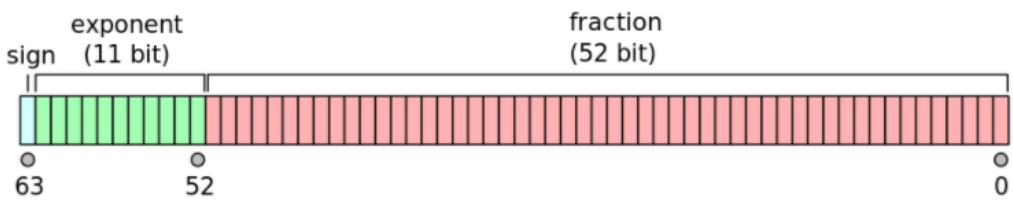
我们可以试下Double版本的代码

```
def fib(n: Int): Double = {
  var (a, b) = (0.0, 1.0)
  for (i <- 1 to n) {
    val temp = b
    b = a + b
    a = temp
  }
  b
}


//scala> fib(100)
//val res73: Double = 5.731478440138172E20

// 对比BigInt版本的结果
//scala> fib(100)
//val res11: BigInt = 573147844013817084101
```

为了加深理解，我们来手推一遍Double的编码过程

```
def convertRadix(str: String, radix: Int, buf: String): String = {
  val i = BigInt(str)
  if (i == 0) buf.reverse
  else if (i % 2 != 0) {
     convertRadix((i/2).toString, radix, buf + "1")
  } else convertRadix((i/2).toString, radix, buf + "0")
}
```

```
令 a = 573147844013817084101
a的二进制表示 a2 =
1 1111 0001 0010 0000 0110 0010 1111 0111 0110 1001 0000 1001 0000 0011 1000
1100 0101
```



图源：wikipedia

对应的公式为

$$(-1)^{sign}(1+\sum_{i=1}^{52}b_{52-i}2^{-i})*2^{e-1023}$$

符号位 S： 0， 表示非负数

二进制表示：`1 1111 0001 0010 0000 0110 0010 1111 0111 0110 1001 0000 1001 0000 0011 1000 1100 0101`

小数点移动后 `1. 1111 0001 0010 0000 0110 0010 1111 0111 0110 1001 0000 1001 0000 0011 1000 1100 0101`

移动位数E1（左移为正，右移为负）：68

存储的阶码E，11位： 68+1023 = 1091 = (10001000011)b

尾数M，52位 （超过的截断，不足的补零）： `1111 0001 0010 0000 0110 0010 1111 0111 0110 1001 0000 1001 0000`

内存中的数据

```
S E            M
0 10001000011  1111 0001 0010 0000 0110 0010 1111 0111 0110 1001 0000 1001
0000
```

我们逆向还原下

```
def recover(s: Int, e: String, m: String): BigDecimal = {
  val e1 = Integer.parseInt(e, 2) - 1023
  val sign = math.pow(-1, s)
  require(m.length == 52)
  val num = 1 + (1 to 52).map(i=>(m(i-1)-'0')*BigDecimal(2).pow(-i)).sum
  println(e1, sign, num)
  BigDecimal(2).pow(e1) * sign * num
}

/*
scala>  recover(0, "10001000011",
"1111000100100000011000101111011101101001000010010000")
(68,1.0,1.941900430109885888896315009333193)
val res53: BigDecimal = 573147844013817069567.9999999999999

scala> recover(0, "10001000011",
"1111000100100000011000101111011101101001000010010000").toDouble
(68,1.0,1.941900430109885888896315009333193)
val res54: Double = 5.731478440138171E20

// 对比之前的结果 完全吻合

scala> fib(100)
val res73: Double = 5.731478440138172E20

*/
```

所以，用Double前，首先需要问自己一个问题，这个数据需不需要确保完整的精度。

所以，要二分吗

之前的问题都是求值，现在换一个问题

斐波那契数列中，第一个有 1000 位数字的是第几项（从零开始算的话）？

考虑略微修改后，复用之前的代码

```
def fib(n: Int): BigInt = {
  var (a, b) = (BigInt(0), BigInt(1))
  for (i <- 1 to n) {
    val temp = b
    b = a + b
    a = temp
  }
  a
}
```

一个朴素的做法是逐个试探

```
scala> fib(200).toString.length
val res80: Int = 42

scala> fib(700).toString.length
val res81: Int = 146

scala> fib(3000).toString.length
val res82: Int = 627

scala> fib(5000).toString.length
val res83: Int = 1045

scala> fib(4000).toString.length
val res84: Int = 836

...
```

之所以能这样做，是因为fib(n)的长度是一个随着n单调非递减的函数，我们只要对比结果

- 比1000大，调小n再试一次
- 比1000小，调大n再试一次
- 正好是1000，此时n就是答案

我们使用二分法，需要确定上界和下界

显然fib(n)的长度小于n，这确定了下界

上界可以用放缩法了确定

我们知道

$$\because fib(n) = fib(n-1) + fib(n-2) > 2 * fib(n-2)$$
$$\therefore fib(n) > 16 * fib(n-8) > 10 * fib(n-8)$$

所以n增加8时，对应的十进制长度至少增加1

$$len(fib(8n)) > n$$

上界可以选择为8*n

我们可以用二分法来替代手动试探结果的过程

```
def fibLen(x: Int): Int = {
  var left = x
  var right = 8 * x
  def len(guess: Int) = fib(guess).toString.length
  while (left < right) {
    var guess = left + (right-left)/2
    var l = len(guess)
    if (l < x) {
      left = guess + 1
    } else if (l >= x) {
      right = guess
    }
    println(guess, l, left, right)
  }
  left
}

/*
scala> fibLen(1000)
(6500,1359,1000,6500)
(3750,784,3751,6500)
(5125,1071,3751,5125)
(4438,928,4439,5125)
(4782,1000,4439,4782)
(4610,964,4611,4782)
(4696,982,4697,4782)
(4739,991,4740,4782)
(4761,995,4762,4782)
(4772,997,4773,4782)
(4777,998,4778,4782)
(4780,999,4781,4782)
(4781,999,4782,4782)
val res108: Int = 4782
*/
```

花枪其三

我们也可以暴力遍历，这个时间复杂度是可以接受的

```
val fibs: LazyList[BigInt] =
  BigInt(0) #:: BigInt(1) #:: (fibs zip fibs.tail).map{ t => t._1 + t._2 }

fibs.zipWithIndex.dropWhile(_._1.toString.length<1000).head._2  // 4782
```

输入范围扩充

如果我们要求一个大一些的数据，比如fib(10^9)

这个数太大了，所以我们求的是 fib(10^9) % (10^9 + 7)来检验结果是否正确

即求

$$fib(10^9)\ \%\ 1000000007$$

首先分析下问题的规模，10^9的情况下，O(n)的做法过慢，最好能有更好的算法

~~如果你是布鲁特佛斯的爱好者，那当我没说~~

普通青年：矩阵快速幂

首先需要介绍两个前置知识

- 矩阵
- 快速幂

矩阵

由 m × n 个数`a[i][j]`排成的m行n列的数表称为m行n列的矩阵，简称m × n矩阵。记作

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

这里会用到一点简单的矩阵乘法

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} \end{pmatrix}$$

快速幂

考虑这么一个问题，求解

$$A^n\ mod\ m$$

模运算的乘法规则和基本四则运算类似

$$A * A(mod\ n) \equiv (A\ mod\ n) * (A\ mod\ n)$$

比较朴素的做法需要O(n)的时间

```
def pow(a: Long, n: Long, m: Long): Long = {
  var res = 1L
  for (i <- 1 to n) {
    res = (res * a) % m
  }
  res
}
```

其实我们可以利用上一步的结果来加速运算

比如，对于求`A^10`

$$A^{10} = A^5 * A^5$$
$$A^5 = A^4 * A^1$$
$$A^4 = A^2 * A^2$$
$$A^2 = A^1 * A^1$$

也可以写作

```
pow(a, 10) = pow(a^2, 5)
= a^2 * pow(a^4, 2)
= a^2 * pow(a^8, 1)
= a^2 * a^8
```

每次对需要计算的幂除以二向下取整，通过这样的方法，每次需要计算的幂次都是原来的一半 这样可以把时间复杂度从O(n)降低到O(logn)

```
def pow(a: Long, n: Long, m: Long): Long = {
  var res = 1L
  var i = n
  var base = a
  while (i > 0) {
    if (i % 2 != 0) {
      res = (res * base) % m
    }
    base = (base * base) % m
    i = i / 2
  }
  res
}
```

矩阵快速幂

有了矩阵和快速幂的前置科技，矩阵快速幂的科技被点亮就是水到渠成的了

用`F(n)`表示斐波那契数列的第n项

考虑构造一个矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

使得

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}$$

如果能找(gou)到(zao)这样的矩阵A，把左右两边看成递推数列，有

$$\because b_n = A * b_{n-1}$$
$$\therefore b_n = A^n * b_0$$
$$\text{而 } b_0 = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

依据矩阵的乘法，可知

$$F_{n+1} = a_{11}F_n + a_{12}F_{n-1}$$
$$F_n = a_{21}F_n + a_{22}F_{n-1}$$

由斐波那契数列的递归式，可知

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$
$$F_n = F_n$$

比较系数后，可以求出矩阵A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

于是，可以得出

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

因此，只要求出 `A^n` 就能知道第N项的斐波那契数列

$$\text{设 } A^n = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ 有 } a + b = F_{n+1}, c = F_n$$

这个求幂运算可以利用之前快速幂的算法，依葫芦画瓢

```
final case class Matrix(elements: Array[Array[Long]], M: Long = 1000000007)
{
  val rows: Int = elements.length
  val cols: Int = elements.headOption.getOrElse(Array.empty[Long]).length

  def *(that: Matrix): Matrix = {
    require(this.cols == that.rows, "invalid matrix size")
    val res = Array.fill(this.rows, that.cols)(0L)
    for (i <- 0 until this.rows; j <- 0 until that.cols)
      for (k <- 0 until this.cols) {
        res(i)(j) = (res(i)(j) + this.elements(i)(k) * that.elements(k)(j))
% M
      }
    Matrix(res)
  }

  def ^(power: Int): Matrix = {
    require(power >= 0, "power should not be negative")

    val unitElements = Array.fill(this.rows, this.cols)(0L)
    for ((i, j) <- (0 until this.rows) zip (0 until this.cols))
unitElements(i)(j) = 1L
```

```
    val unitMatrix = Matrix(unitElements)

    @scala.annotation.tailrec
    def fastPow(res: Matrix, p: Int, base: Matrix): Matrix = {
      if (p == 0) res
      else if (p % 2 == 0) fastPow(res, p/2, base * base)
      else fastPow(res * base, p/2, base * base)
    }

    fastPow(unitMatrix, power, this)
  }
}
```

简单测试下,速度还是很快的

```
scala> val A = Matrix(Array(Array(1L,1L), Array(1L,0L)))
val A: Matrix = Matrix([[J@5e85c21b,1000000007)

scala> def fib(n: Int) =  (A^n).elements(1)(0)
def fib(n: Int): Long

scala> fib(1000000000)
val res7: Long = 21
```

文艺青年：快速倍增法

矩阵快速幂的算法的时间复杂度是O(m^3*logn)级别的，这里的m计算两个m长度的数乘积所需要的时间

其实，有一个速度更快的方案，我们可以略过矩阵计算这一步骤

一个朴素的思路是，观察并猜出斐波那契数列的2*2矩阵表达形式，然后用数学归纳法证明

$$\begin{pmatrix} F(n+1) & F(n) \\ F(n) & F(n-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$$

对上述式子做一个变换

$$\begin{pmatrix} F(2n+1) & F(2n) \\ F(2n) & F(2n-1) \end{pmatrix} = (\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n)^2 = \begin{pmatrix} F(n+1) & F(n) \\ F(n) & F(n-1) \end{pmatrix}^2$$
$$\begin{pmatrix} F(n+1) & F(n) \\ F(n) & F(n-1) \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} F(n+1) & F(n) \\ F(n) & F(n-1) \end{pmatrix}^2 =$$
$$\begin{pmatrix} F(n+1)^2+F(n)^2 & F(n+1)F(n)+F(n)F(n-1) \\ F(n+1)F(n)+F(n)F(n-1) & F(n)^2+F(n-1)^2 \end{pmatrix}$$

由左右两个矩阵间的对应关系，可得

$$F(2n+1) = F(n+1)^2 + F(n)^2$$
$$F(2n) = F(n+1)F(n) + F(n)F(n-1) = F(n)(F(n+1) + F(n-1))$$
$$= F(n)(F(n+1) + F(n+1) - F(n)) = F(n)(2F(n+1) - F(n))$$
$$F(2n-1) = F(n)^2 + F(n-1)^2$$

我们需要用到也就是

$$F(2n) = F(n)(2F(n+1) - F(n))$$
$$F(2n-1) = F(n)^2 + F(n-1)^2$$

有了这两个式子，我们能从 `F(n)，F(n-1)` 计算出 `F(2n)，F(2n-1)`

```scala
def fastFib(n: Int, M: Long = 1000000007): (Long, Long) = {
  if (n == 0) (0L, 1L)
  else {
    val p = fastFib(n / 2)
    val a = p._1 * ((2 * p._2  - p._1) % M + M) % M
    val b = (p._1 * p._1 + p._2 * p._2) % M
    if (n % 2 == 0) (a, b)
    else (b, (a + b) % M)
  }
}
```

这里之所以要`(... % M + M)`，是为了防止中间过程出现负数

简单试验下

```scala
scala> fastFib(1000000000)._1
val res64: Long = 21
```

二逼青年： 扩充数域

一个化归的笑话

如果不懂什么矩阵，也不懂什么数学归纳法，更不懂什么生成函数，能不能用初等方法求出答案呢?

首先我们需要前置知识：斐波那契数列的通项公式推导

在此之前，我们先来解决递推式的一般推导问题

$$x_n = ax_{n-1}, x_0 = C, a \neq 0$$

这个式子很好求通项公式，观察到下一项是上一项的倍数，所以有

$$\because \frac{x_n}{x_{n-1}} = a, \frac{x_n - 1}{x_{n-2}} = a, \ldots, \frac{x_1}{x_0} = a$$
$$\therefore x_n = x_0 * a^n = C * a^n$$

> 一天，数学家觉得自己已受够了数学，于是他跑到消防队去宣布他想当消防员。 消防队长说：「您看上去不错，可是我得先给您一个测试。」 消防队长带数学家到消防队后院小巷，巷子里有一个货栈，一只消防栓和一卷软管。 消防队长问：「假设货栈起火，您怎么办？」 数学家回答：「我把消防栓接到软管上， 打开水龙，把火浇灭。」 消防队长说：「完全正确。最后一个问题：假设您走进小巷，而货栈没有起火，您怎么办？」 数学家疑惑地思索了半天，终于答道：「我就把货栈点着。」 消防队长大叫起来：「什么？太可怕了，您为什么要把货栈点着？」 数学家回答：「这样我就把问题化简为一个我已经解决过的问题了。」

好了，有了这一问的基础，我们加大点难度，尝试更加一般的结论

$$y_n = ay_{n-1} + b, y_0 = C$$

如果这个式子的左右两边能化归到第一问等比的形式，就好求了

$$(y_n + t) = a(y_{n-1} + t)$$

展开后可以求出

$$\because y_n = ay_{n-1} + (a-1)t$$
$$\therefore b = (a-1)t, t = \frac{b}{a-1}$$

这里要注意一个问题，分母不能为0，所以对`a=1`的情况要额外讨论，当`a=1`时，原式便退化成了等差数列

$$\because y_n = y_{n-1} + b \therefore y_n = C + nb$$

当a不为1时

$$\frac{y_n + \frac{b}{a-1}}{y_{n-1} + \frac{b}{a-1}} = a$$
$$\text{由第一问的结论可知}$$
$$y_n + \frac{b}{a-1} = (C + \frac{b}{a-1}) * a^n$$

综上所述

$$y_n = \begin{cases} (C + \frac{b}{a-1}) * a^n - \frac{b}{a-1}, & a \neq 1 \\ C + nb, & a = 1 \end{cases}$$

说了这么多，让我们回到原来的问题

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, F_0 = 0, F_1 = 1$$

我们希望求出上面这个问题的一般解

有了两问的铺垫，我们知道可以用构(cou)造的方法化归到已知的问题

对于

$$y_n = ay_{n-1} + b, y_0 = C$$

我们知道其通项公式为

$$y_n = \begin{cases} (C + t) * a^n - t, & a \neq 1, \text{其中} t = \frac{b}{a-1} \\ C + nb, & a = 1 \end{cases}$$

我们的目标希望整理出如下的式子

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$
$$\text{通过换元，转换成} y_n = ay_{n-1} + b$$

使用待定系数法

$$\text{设：} F_n + pF_{n-1} = q(F_{n-1} + pF_{n-2}) + r$$
$$\therefore F_n = (q-p)F_{n-1} + qpF_{n-2} + r$$
$$\therefore q - p = 1, qp = 1, r = 0$$

由一元二次方程，可知

$$\begin{cases} p = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ q = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \text{或者} \begin{cases} p = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ q = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \end{cases}$$

接着

$$令\ y_n = F_n + pF_{n-1}$$
$$则\ y_n = qy_{n-1}, y_1 = F_1 + pF_0 = 1$$
$$\therefore y_n = q^{n-1}$$
$$F_n = -pF_{n-1} + q^{n-1}$$

右边不是常数，无法直接使用第二问的结论，没关系，我们继续凑

$$令\ z_n = F_n + tq^n$$
$$F_n + tq^n = -p(F_{n-1} + tq^{n-1})$$
$$F_n = -pF_{n-1} - (pt + qt)q^{n-1}$$
$$\therefore pt + qt = -1, t = \frac{-1}{p+q}$$

所以

$$z_n = -p(z_{n-1})$$
$$z_n = (-p)^n t$$
$$F_n = z_n - tq^n = ((-p)^n - q^n)t = \frac{(q^n - (-p)^n)}{p+q}$$
$$= \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n}{\sqrt{5}}$$

为了便于书写，我们做如下约定

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

那么

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(a^n - b^n)$$

一点简单的数论

对于求模运算，由于`a，b`的分母都为2，首先需要找到2在1000000007的模逆元

方法有很多，这里直接给出结果`500000004`

我们知道，斐波那契的每一项都是整数，因而尽管上面的式子中有无理数，但是这一部分都是会被互相抵消的

为了不丢失精度，将无理数看作类似复数的东西，设

$$m + n\sqrt{5}记作数对\ < m, n >，其中m, n都为整数$$
$$M = 1000000007$$
$$t = 500000004$$

那么

$$F_n\ mod\ M = \frac{1}{\sqrt{5}}(< t, t >^n - < t, -t >^n)\ mod\ M$$
$$其中，令K =< t, t >^n - < t, -t >^n =< c, d >$$

承前所言，无理数部分会抵消，所以`c`一定为0,我们关心的就是`d`的值

接下来我们需要定义数对在模意义下的运算

$$(< a_1, b_1 > + < a_2, b_2 >)\ mod\ M =< (a_1 + a_2)\ mod\ M, (b_1 + b_2)\ mod\ M >$$
$$(< a_1, b_1 > * < a_2, b_2 >)\ mod\ M =< (a_1a_2 + 5b_1b_2)\ mod\ M, (a_1b_2 + a_2b_1)\ mod\ M >$$
$$(< a_1, b_1 > - < a_2, b_2 >)\ mod\ M =< (a_1 - a_2)\ mod\ M, (b_1 - b_2)\ mod\ M >$$

幂运算的部分一样可以套用快速幂的思路，不同的是，这里不存在单位元

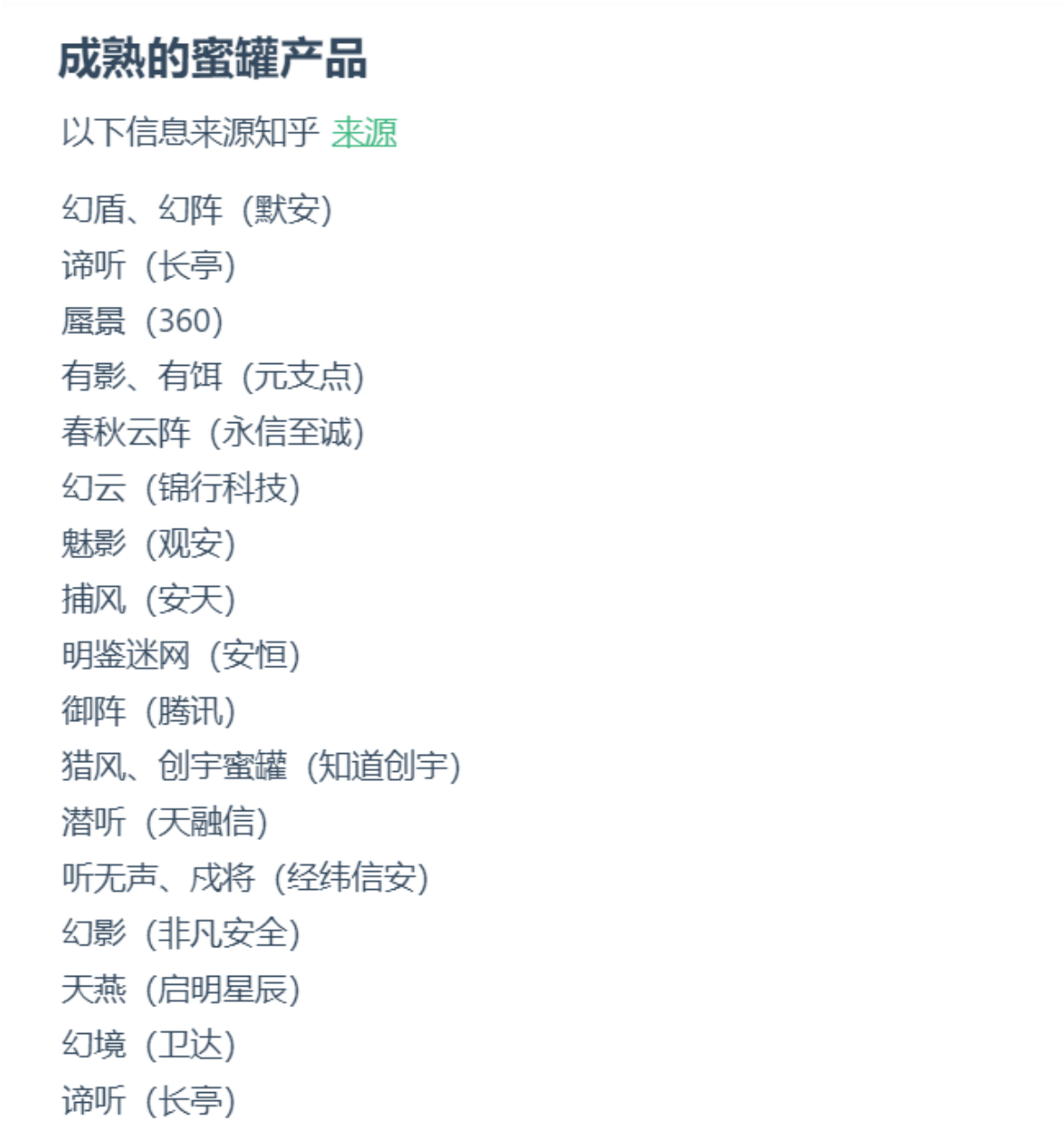
```scala
final case class ExPair(a: Long, b: Long, M: Long = 1000000007) {
  def +(that: ExPair): ExPair = {
    ExPair((this.a + that.a) % M, (this.b + that.b) % M)
  }

  def *(that: ExPair): ExPair = {
    val na = (this.a * that.a + 5 * this.b * that.b) % M
    val nb = (this.a * that.b + this.b * that.a) % M
    ExPair(na, nb)
  }

  def -(that: ExPair): ExPair = {
    ExPair((this.a - that.a + M) % M, (this.b - that.b + M) % M)
  }

  def ^(power: Int): ExPair = {
    require(power >= 1, "power should be positive")

    @scala.annotation.tailrec
    def fastPow(res: Option[ExPair], p: Int, base: ExPair): ExPair = {
      if (p == 0) res.get
      else if (p % 2 == 0) {
        fastPow(res, p/2, base * base)
      }
      else {
        if (res.isDefined) fastPow(Some(res.get * base), p/2, base * base)
        else fastPow(Some(base), p/2, base * base)
      }
    }

    fastPow(None, power, this)
  }
}
```

和之前的结果做一个交叉检验

```scala
scala> val T = 500000004
val T: Int = 500000004

scala> val A = ExPair(T, T)
val A: ExPair = ExPair(500000004,500000004,1000000007)

scala> val B = ExPair(T, -T)
val B: ExPair = ExPair(500000004,-500000004,1000000007)

scala> def fib(n: Int) = ((A^n)-(B^n)).b
def fib(n: Int): Long

scala> (1 to 10).map(fib)
val res47: IndexedSeq[Long] = Vector(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55)

scala>  fib(1000000000)
val res48: Long = 21
```

Googol的斐波那契

某著名搜索引擎的来源，就是单词Googol，起名字还真是要有品味的，不然就像这样



图片来源

~~或者拿古希腊神仙名字来命名~~

现在新的问题来了，求斐波那契数列的第Googol项，即

$$F(10^{100})\ mod\ (10^9+7)$$

这里需要一点简单的幂运算知识

$$\begin{gathered}A^{p+q}=A^pA^q\\A^{p\cdot q}=(A^p)^q\\A^{p^q}=A^{p^{q-1}\cdot p}=(A^{p^{q-1}})^p=\dots\\=\underbrace{(((A^p)^p)\dots)^p)^p}_{q个}\end{gathered}$$

依据这个思路，写起来就不难了

```
// 复用之前方法
final case class Matrix(elements: Array[Array[Long]], M: Long = 1000000007)
{
  val rows: Int = elements.length
  val cols: Int = elements.headOption.getOrElse(Array.empty[Long]).length

  def *(that: Matrix): Matrix = {
    require(this.cols == that.rows, "invalid matrix size")
    val res = Array.fill(this.rows, that.cols)(0L)
    for (i <- 0 until this.rows; j <- 0 until that.cols)
      for (k <- 0 until this.cols) {
        res(i)(j) = (res(i)(j) + this.elements(i)(k) * that.elements(k)(j))
% M
      }
    Matrix(res)
  }

  def ^(power: Int): Matrix = {
    require(power >= 0, "power should not be negative")

    val unitElements = Array.fill(this.rows, this.cols)(0L)
    for ((i, j) <- (0 until this.rows) zip (0 until this.cols))
unitElements(i)(j) = 1L
    val unitMatrix = Matrix(unitElements)

    @scala.annotation.tailrec
    def fastPow(res: Matrix, p: Int, base: Matrix): Matrix = {
      if (p == 0) res
      else if (p % 2 == 0) fastPow(res, p/2, base * base)
      else fastPow(res * base, p/2, base * base)
    }

    fastPow(unitMatrix, power, this)
  }

  // 新加的
  def ^^(p: Int, q: Int): Matrix = {
    require(p>0 && q>0, "power parameters, p and q, should be positive")
    (1 until q).foldLeft(this ^ p)((cur: Matrix, _) => cur ^ p)
  }
}


// fib(p^q)
def fibPQ(p: Int, q: Int) = fastFib(p)._1
```

验证下

```
scala> val A = Matrix(Array(Array(1L,1L), Array(1L,0L)))
val A: Matrix = Matrix([[J@73ba068e,1000000007)

scala> def fibPQ(p: Int, q: Int) =  (A^^(p,q)).elements(1)(0)
def fibPQ(p: Int, q: Int): Long

scala> fibPQ(10, 9)
```

```
val res49: Long = 21

scala> fibPQ(10, 100)
val res50: Long = 175077019

scala> fibPQ(10, 1000)
val res51: Long = 552179166
```

扩展阅读

- 现有的浮点运算是基于二进制的，有没有十进制的呢
- 基于斐波那契的数据结构，Fib堆
- 基于斐波那契的算法，Fib搜索
- 求解逆元时常用的算法，扩展欧几里得(ex-gcd)以及费马小定理
- 求解常系数线性齐次递推关系，参考《离散数学》8.2.2小节
- Karatsuba乘法

参考链接

1. WikiPedia: Fibonacci number
2. OI-wiki: fibonacci
3. Github: 我们为什么要考斐波那契数列？一道上机笔试题的解析，兼谈技术面试和编程基本功
4. 博客园: 【学习笔记】斐波那契数列的简单性质
5. Fast Fibonacci algorithms
6. CSDN: float和double的编码示例
7. 知乎：斐波那契数列通项公式是怎样推导出来的？ - Lancewu的回答
8. 人民教育出版社-课程教材研究所：斐波那契数列的通项公式推导